**2019- 2020 Eğitim Öğretim Yılı Analiz IV Dersi II. Quiz Soruları**

06.05.2020

**1.** Verilen

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$$
$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$$

denklemlerini ele alalım. Bu denklemlerin bir çözümü olan $(2,-1,2,1)$ noktasının bir komşuluğunda, bu denklemlerden $u$ ve $v$ değişkenlerini $x$ ve $y$ değişkenlerine bağlı olarak çözebilir misiniz? Cevabınız olumlu ise $(2,-1,2,1)$ noktasında $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ kısmi türevlerini bulunuz.

**2.** $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x$ fonksiyonu verilsin.

**a.** $f$ fonksiyonunun varsa maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

**b.** $B = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 6, -3 \le y \le 3\}$ bölgesinde verilen fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

**NOT. Sınav 13.00-15.00 saatleri arasındadır.**

Başarılar Dileriz.

Prof.Dr. Cenap Duyar - Doç.Dr. Ayşe Sandıkçı

ANALİZ 4 QUİZ 2 CEVAPLAR

1- $F(x,y,u,v)=\left(x^2-y^2-u^3+v^2+4,2xy+y^2-2u^2+3v^4+8\right)$ olsun.

$$J=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right|_{(2,-1,2,1)}=\left.\begin{vmatrix}-3u^2 & 2v\\ -4u & 12v^3\end{vmatrix}\right|_{(2,-1,2,1)}=\begin{vmatrix}-12 & 2\\ -8 & 12\end{vmatrix}=-128\neq 0$$

olduğundan Kapalı fonk. Teorem ile yerel olarak $(2,-1,2,1)$ noktasının bir civarında

$$(u,v)=G(x,y)=\left(G_1(x,y),G_2(x,y)\right)$$

çözümü var demektir. Ayrıca

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}\right|_{(2,-1,2,1)}=\frac{1}{128}\left.\begin{vmatrix}2x & 2v\\ 2y & 12v^3\end{vmatrix}\right|_{(2,-1,2,1)}$$

$$=\frac{1}{128}\left.\left(24xv^3-4yv\right)\right|_{(2,-1,2,1)}=-\frac{44}{128}.$$

.

Soru:

$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x$ fonksiyonu verilsin.

a) fonksiyonun varsa maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

b) $B = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 6,\ -3 \le y \le 3\}$ bölgesinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm:

a) Önce fonksiyonun kritik noktalarını bulalım.

$\nabla f(x,y) = (0,0)$ koşulunu sağlayan noktalar kritik noktalardır.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x+2y-4,\ 2x+6y) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2y-4=0 \\ 2x+6y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x+y=2 \\ -\ x+3y=0 \\ \hline -2y=2 \Rightarrow y=-1. \\ x=3 \end{array}$$

$\Rightarrow (3,-1)$ kritik noktadır.

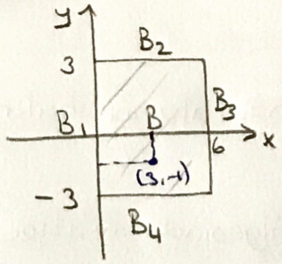
$f_{xx}(x,y) = 2,\quad f_{yy}(x,y) = 6,\quad f_{xy}(x,y) = 2$

$$\Delta = f_{xx}(3,-1)\cdot f_{yy}(3,-1) - (f_{xy}(3,-1))^2 = 2\cdot 6 - 2^2 = 8 > 0$$

ve $f_{xx}(3,-1) = 2 > 0$ olduğundan $(3,-1)$ bir yerel minimum noktadır.

$\boxed{f(3,-1) = \cancel{9} - 6 + \cancel{3} - 12 = -6}$ yerel minimum değerdir.

b) $B = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 6,\ -3 \le y \le 3\}$




(a) şıkkında f fonksiyonunun B kümesinin içinde bir yerel minimuma sahip olduğunu bulduk. fonksiyonun bu noktada aldığı minimum değer

$$\boxed{f(3,-1) = -6}$$

f fonksiyonu sürekli, B kapalı ve sınırlı (yani kompakt) olduğundan, B kümesinin sınırında da en büyük ve en küçük değere sahip olabilir. Şimdi bunları inceleyelim:

$B_1$ üzerindeki noktalar $(0,y)$ şeklinde olup

$f(0,y) = 3y^2$, $\quad -3 \le y \le 3$ olur.

$y=-3$ ve $y=3$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(0,-3) = f(0,3) = 27}$

$B_2$ üzerindeki noktalar $(x,3)$, $0 \le x \le 6$ şeklindedir.

Bu durumda $f(x,3) = x^2+6x+27-4x = x^2+2x+27$ olur.

$x=6$ alınırsa $\boxed{f(6,3) = 36+12+27 = 75}$

$B_3$ üzerindeki noktalar $(6,y)$ şeklinde olup,

$f(6,y) = 36+12y+3y^2-24 = 12+12y+3y^2$, $\quad -3 \le y \le 3$

$y=3 \Rightarrow$ $\boxed{f(6,3) = 12+12\cdot 3+3\cdot 9 = 75}$

$y=-3 \Rightarrow$ $\boxed{f(6,-3) = 12-36+27 = 3}$

$B_4$ üzerindeki noktalar $(x,-3)$, $0 \le x \le 6$ şeklindedir.

$f(x,-3) = x^2-6x+27-4x = x^2-10x+27$

$x=0$, $x=6$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(0,-3) = 27}$, $\boxed{f(6,-3) = 36-60+27 = 3}$

Fonksiyon en büyük değeri $(6,3)$ noktasında aldığından, bu noktada bir mutlak mak. sahiptir. Mutlak max. değer $f(6,3) = 75$.
En küçük değeri $(3,-1)$ de aldığından bu noktada bir mutlak min. a sahiptir. Mutlak min. değer $f(3,-1) = -6$ bulunur.